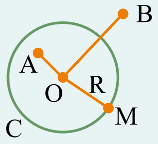
دوپینگ فوری
شب امتحان

خلاصه فشرده برای مرور سریع

هندسه یازدهم ریاضی

فصل اول

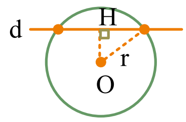
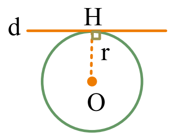
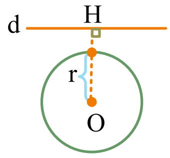
وضعیت یک نقطه نسبت به دایره



الف) نقطهٔ A درون دایرهٔ $C(O,R)$ قرار دارد، اگر و تنها اگر $OA < R$ باشد.
ب) نقطهٔ M روی دایرهٔ $C(O,R)$ قرار دارد، اگر و تنها اگر $OM = R$ باشد.
پ) نقطهٔ B بیرون دایرهٔ $C(O,R)$ قرار دارد، اگر و تنها اگر $OB > R$ باشد.

وضعیت یک خط نسبت به دایره

اوضاع خط و دایره

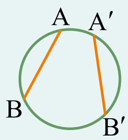
متقاطع	مماس	متخارج
$OH < r$	$OH = r$	$OH > r$
تعداد نقاط اشتراک = ۲	تعداد نقاط اشتراک = ۱	تعداد نقاط اشتراک = ۰
		

وتر در دایره

الف) در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.
ب) در هر دایره، اگر یک قطر، وتری از آن دایره را نصف کند، آن‌گاه بر آن وتر عمود است و کمان نظیر آن وتر را نیز نصف می‌کند.
پ) در هر دایره، اگر یک قطر، کمانی از آن دایره را نصف کند، آن‌گاه بر وتر نظیر آن قطر عمود بوده و آن را نصف می‌کند.

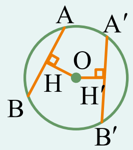
ویژگی‌های وتر

الف) در یک دایره، دو وتر برابر یکدیگرند، اگر و تنها اگر کمان‌های آن‌ها برابر باشند.



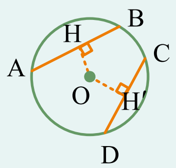
$$AB = A'B' \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$$

ب) در یک دایره، دو وتر برابر یکدیگرند، اگر و تنها اگر فاصلهٔ مرکز دایره از آن‌ها برابر باشد.



$$AB = A'B' \Leftrightarrow OH = OH'$$

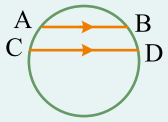
از دو وتر نامساوی در دایره، آن‌که بزرگ‌تر است، کمان بزرگ‌تر دارد و به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس. در شکل زیر اگر $AB > CD$، آن‌گاه:



$$AB > CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow OH < OH'$$

کمان‌های محصور بین دو وتر موازی

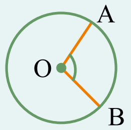
دو وتر از یک دایره موازی‌اند، اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آن‌ها مساوی باشد.



$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$

زاویهٔ مرکزی

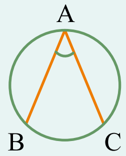
زاویهٔ مرکزی، زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع است و دو ضلع آن شعاع‌های دایره هستند و اندازهٔ این زاویه برابر با کمان روبه‌روی آن است.



$$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$$ مرکزی

زاویهٔ محاطی

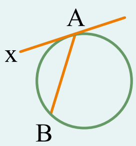
زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند. اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر نصف اندازهٔ کمان روبه‌روی آن است.



$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

زاویهٔ ظلی

زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن شامل وتری از دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره است. اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر نصف اندازهٔ کمان روبه‌روی آن است.

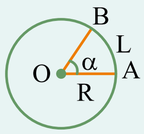


$$B\hat{A}x = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

طول کمانی از دایره

طول یک کمان با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به آن کمان، رابطهٔ مستقیم دارد. در شکل مقابل، اگر L اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AB}$ باشد، داریم:

(α برحسب درجه است.)

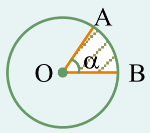


$$\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ} = \frac{L}{۲\pi R} \Rightarrow L = \frac{\pi R \alpha}{۱۸۰^\circ}$$

مساحت قطاعی از دایره

مساحت یک قطاع با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی آن قطاع، رابطهٔ مستقیم دارد. در شکل مقابل، اگر S مساحت قطاع هاشور خورده باشد، داریم:

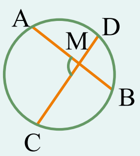
(α برحسب درجه است.)



$$\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ} = \frac{S}{\pi R^۲} \Rightarrow S = \frac{\pi R^۲ \alpha}{۳۶۰^\circ}$$

زاویهٔ بین دو وتر

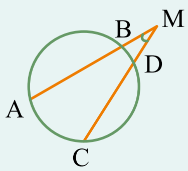
اگر دو وتر AB و CD در نقطهٔ M درون دایره متقاطع باشند، آن‌گاه داریم:



$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲}$$

زاویهٔ بین امتداد دو وتر

اگر دو وتر AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ M خارج دایره قطع کنند، آن‌گاه داریم:

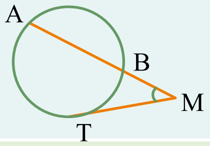


$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}}{۲}$$

زاویهٔ بین مماس و امتداد یک وتر

اگر امتداد وتر AB، خط مماس بر دایره را در نقطهٔ M قطع کند، آن‌گاه داریم:

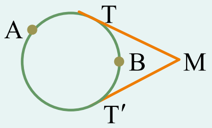
$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{BT}}{2}$$



زاویهٔ بین دو مماس

اگر از نقطهٔ M، دو مماس MT و MT' را بر دایره رسم کنیم، آن‌گاه داریم:

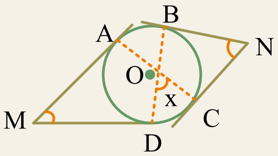
$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{TAT'} - \overset{\frown}{TBT'}}{2}$$



توجه:

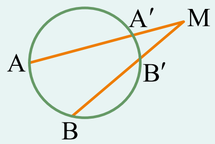
در شکل مقابل، زاویهٔ x میانگین زاویهٔ $\hat{M}$ و $\hat{N}$ است.

$$x = \frac{\hat{M} + \hat{N}}{2}$$

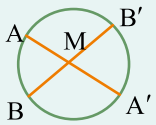


وترهای متقاطع

اگر دو وتر درون دایره یا امتداد دو وتر در بیرون دایره، متقاطع باشند، آن‌گاه حاصل‌ضرب دو قطعهٔ یک وتر با حاصل‌ضرب دو قطعهٔ وتر دیگر برابر است.



(ب)

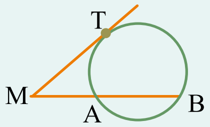


(الف)

$$\boxed{MA \times MA' = MB \times MB'}$$

قاطع و مماس

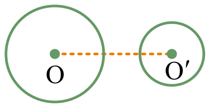
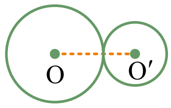
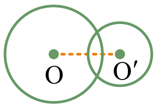
اگر از یک نقطه خارج دایره‌ای، مماس و قاطعی بر دایره رسم شود، آن‌گاه مربع طول مماس با حاصل‌ضرب دو قطعهٔ قاطع برابر است.



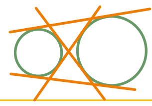
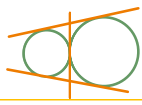
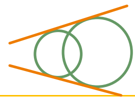
$$\boxed{MT^2 = MA \times MB}$$

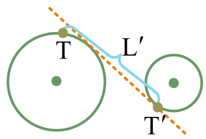
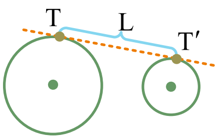
حالت‌های دو دایره نسبت به هم

دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $OO' = d$ در نظر می‌گیریم. حالت‌های مختلفی که این دو دایره می‌توانند نسبت به هم داشته باشند، به صورت زیر است:

دو دایرهٔ برون هم (متخارج)	$d > R + R'$	
دو دایرهٔ مماس برون	$d = R + R'$	
دو دایرهٔ متقاطع	$\lvert R - R' \rvert < d < R + R'$	
دو دایرهٔ مماس درون	$d = \lvert R - R' \rvert$	
دو دایرهٔ متداخل	$d < \lvert R - R' \rvert$	
دودایرهٔ هم‌مرکز	$d = ۰$	

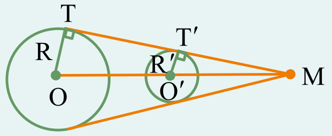
مماس مشترک دو دایره

وضعیت	متخارج	مماس خارج	متقاطع	مماس داخل	متداخل
شکل					
تعداد مماس مشترک‌های داخلی	۲	۱	۰	۰	۰
تعداد مماس مشترک‌های خارجی	۲	۲	۲	۱	۰

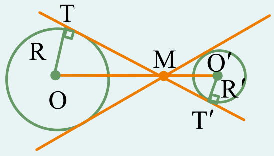
مماس مشترک داخلی	مماس مشترک خارجی
	
$L' = \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲}$	$L = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$

همرسی مماس مشترک‌های دو دایره و خط‌المرکزین

اگر شعاع‌های دو دایره نابرابر باشند، آن‌گاه مماس مشترک‌های خارجی و خط‌المرکزین دو دایره همرس‌اند. همچنین مماس مشترک‌های داخلی و خط‌المرکزین دو دایره همرس‌اند. نقطهٔ همرسی مماس مشترک‌های خارجی یا داخلی و خط‌المرکزین، خط‌المرکزین دو دایره را به نسبت شعاع‌ها تقسیم می‌کند.



$$\frac{OM}{O'M}=\frac{R}{R'}$$

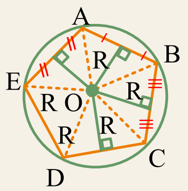


$$\frac{OM}{O'M}=\frac{R}{R'}$$

چندضلعی محاطی

چندضلعی را محاطی می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که از همهٔ رئوس آن بگذرد، در این صورت دایره را دایرهٔ محیطی آن چندضلعی می‌نامیم.

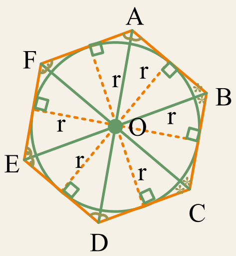
نتیجه: یک چندضلعی محاطی است، اگر و تنها اگر عمودمنصف‌های همهٔ ضلع‌های آن در یک نقطه، همرس باشند.



چندضلعی محیطی

چندضلعی را محیطی می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که بر همهٔ اضلاع آن مماس باشد، در این صورت دایره را دایرهٔ محاطی آن چندضلعی می‌نامیم.

نتیجه: یک چندضلعی محیطی است، اگر و تنها اگر نیمسازهای داخلی همهٔ زاویه‌های آن در یک نقطه همرس باشند.

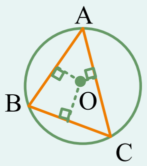


نکته طلایی

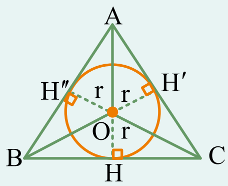
اگر مساحت یک چندضلعی محیطی برابر S، محیط آن ۲P و شعاع دایرهٔ محاطی آن r باشد، آن‌گاه $r=\frac{S}{P}$.

دایره‌های محیطی و محاطی مثلث

الف) عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث همرس‌اند و نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها تنها نقطه‌ای است که از سه رأس یک مثلث به یک فاصله است، پس اگر دایره‌ای به مرکز نقطهٔ تلاقی سه عمودمنصف به شعاع فاصلهٔ این نقطه تا یک رأس رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس مثلث می‌گذرد، یعنی دایرهٔ محیطی مثلث است.

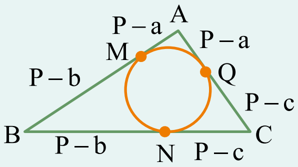


ب) نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث همرس‌اند و نقطهٔ همرسی نیمسازها از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است. مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث، نقطهٔ همرسی سه نیمساز است و شعاع دایره که با r نمایش داده می‌شود، فاصلهٔ این نقطه از هر یک از سه ضلع مثلث است. اگر S مساحت و P نصف محیط مثلث باشد، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث از رابطهٔ $r=\frac{S}{P}$ محاسبه می‌شود.



نکته طلایی

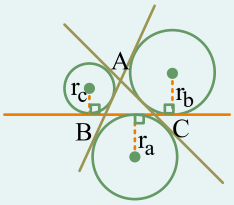
طول قطعاتی که دایرهٔ محاطی روی اضلاع مثلث می‌سازد، از روابط زیر به دست می‌آیند:



$$AM = AQ = P - a$$
$$BM = BN = P - b$$
$$CN = CQ = P - c$$

نکته طلایی

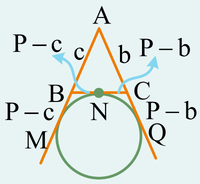
هر مثلث مطابق شکل، سه دایرهٔ محاطی خارجی دارد، اگر p نصف محیط مثلث باشد، شعاع این دایره‌ها به صورت‌های زیر به دست می‌آید:



$$r_a = \frac{S}{P-a} \qquad r_b = \frac{S}{P-b} \qquad r_c = \frac{S}{P-c}$$

نکته طلایی

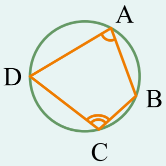
در مثلث ABC، طول قطعاتی که دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC روی این ضلع و امتداد دو ضلع دیگر می‌سازد، از روابط زیر به دست می‌آیند:



$$BM = BN = P - c$$
$$CQ = CN = P - b$$
$$AM = AQ = P$$

چهارضلعی محاطی

یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر هر دو زاویهٔ مقابل آن مکمل باشند.



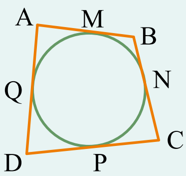
چهارضلعی ABCD محاطی است. $\Leftrightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$

توجه:

بین چهارضلعی‌های معروف، مربع، مستطیل و ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین همواره محاطی‌اند.

چهارضلعی محیطی

یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل برابر با مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشد، بنابراین، در شکل روبه‌رو داریم:



چهارضلعی ABCD محیطی است. $\Leftrightarrow AB + DC = AD + BC$

توجه:

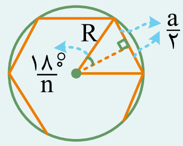
بین چهارضلعی‌های معروف، مربع، لوزی و کایت همواره محیطی‌اند.

چندضلعی‌های منتظم

یک چندضلعی محدب را منتظم می‌نامند، هرگاه تمام ضلع‌های آن هم‌اندازه و تمام زاویه‌های آن نیز هم‌اندازه باشند. به عنوان مثال مثلث متساوی‌الاضلاع سه ضلعی منتظم و مربع چهارضلعی منتظم است.

نکته طلایی

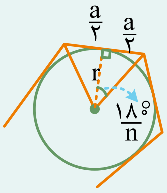
اگر n ضلعی منتظمی به ضلع a و مساحت S درون دایره به شعاع R محاط شده باشد، آن‌گاه:



$$a = 2R.\sin(\frac{180^\circ}{n}) \qquad S = n(\frac{1}{2} \times R \times R \times \sin\frac{360^\circ}{n})$$

نکته طلایی

اگر nضلعی منتظمی به ضلع a و مساحت S بر دایره‌ای به شعاع r محیط شده باشد، آن‌گاه:



$$a = 2r.\tan(\frac{180^\circ}{n}) \qquad S = n(\frac{r.a}{2})$$

فصل دوم

تبدیل و ویژگی‌های آن‌ها

تبدیل‌ها می‌توانند موقعیت (جایگاه شکل در صفحه) یا اندازهٔ شکل را تغییر دهند.
به تبدیل‌های بازتاب، دوران و تجانس تبدیل‌های هندسی می‌گوییم.

تبدیل: تبدیل T در صفحهٔ P، تابعی است که به هر نقطهٔ A از صفحهٔ P، دقیقاً یک نقطه مانند A' را از صفحهٔ P نظیر می‌کند و برعکس.
هر نقطهٔ A' از صفحهٔ P، تصویر دقیقاً یک نقطهٔ A از صفحه P است.

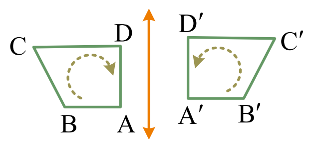
طولپایی (ایزومتری): تبدیل‌هایی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند، تبدیلات طولپا (ایزومتری) می‌نامند. به عبارتی اگر داشته باشیم $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$، آن‌گاه داریم: $AB = A'B'$

نقطهٔ ثابت تبدیل: در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافتهٔ آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، نقطهٔ ثابت تبدیل می‌نامند.

تبدیل همانی: تبدیل T را تبدیل همانی گوییم، هرگاه به ازای هر نقطهٔ A از صفحهٔ P داشته باشیم: $T(A) = A$

ویژگی‌های بازتاب نسبت به خط

ویژگی‌های بازتاب نسبت به خط
۱) بازتاب نسبت به خط، ایزومتری است، یعنی پاره‌خط و تبدیل‌یافته‌اش، هم‌اندازه‌اند.
۲) بازتاب شیب‌پا نیست یعنی شیب خط را لزوماً حفظ نمی‌کند، بازتاب تنها در صورتی شیب خط را حفظ می‌کند که خط موازی با محور بازتاب یا عمود بر آن باشد.
۳) بازتاب نسبت به خط، جهت‌پا نیست.
٤) در بازتاب محوری، اندازهٔ زاویه‌ها ثابت می‌ماند.
۵) در بازتاب نسبت به یک خط، شکل و تصویرش با هم همنهشت هستند.
٦) اگر نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A تحت بازتاب نسبت به خط d باشد، نقطهٔ A نیز تصویر نقطهٔ A' تحت بازتاب نسبت به خط d محسوب می‌شود، یعنی اگر S یک تبدیل بازتاب باشد و داشته باشیم $S(A) = A'$، آن‌گاه $S(A') = A$ خواهد بود.



ABCD ساعتگرد و $A'B'C'D'$ پادساعتگرد

ویژگی‌های انتقال
۱) انتقال، طولپا (ایزومتری) است.
۲) انتقال، شیب‌پا است.
۳) انتقال، جهت‌پا است.
٤) در انتقال، اندازهٔ زاویه ثابت می‌ماند.
۵) یک شکل و انتقال‌یافته‌اش همواره همنهشت هستند.